





دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

عنوان

**نمونه‌ای از پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری)
در قالب زی پرشین**

نگارش

نام و نام خانوادگی

استاد راهنما

دکتر مجتبی حاجی پور

استاد مشاور

نام و نام خانوادگی استاد مشاور

زمستان ۱۴۰۲



دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد

نمونه‌ای از پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) در قالب زی پرشین

نگارش: نام و نام خانوادگی

در تاریخ ۱۴۰۲/۱۰/۰۰ کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

امضاء: استاد راهنما: دکتر مجتبی حاجی پور

امضاء: استاد مشاور: نام و نام خانوادگی استاد مشاور

امضاء: استاد ممتحن داخلی ۱: آقای دکتر

امضاء: استاد ممتحن داخلی ۲: آقای دکتر

امضاء: سرپرست تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر



دانشگاه صنعتی سهند

به نام خدا

تعهدنامه اصالت اثر

تاریخ: ۱۴۰۲/۱۰/۰۰

اینجانب نام و نام خانوادگی متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب بوده و صحت و سقم آنها بر عهده ی خودم می باشد و به دستاوردهای دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است مطابق مقررات و روال متعارف ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نگردیده است. در صورت اثبات تخلف در هر زمان، مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه صنعتی سهند از درجه اعتبار ساقط بوده و دانشگاه حق پیگیری قانونی خواهد داشت.

نام و نام خانوادگی

امضاء

چکیده

مسأله‌ی براتو یک مسأله مقدار مرزی غیرخطی است که به‌طور معمول به‌عنوان یک معیار برای آزمایش دقت همگرایی بسیاری از روش‌های تحلیلی و عددی به‌کار می‌رود. در این پایان‌نامه به دنبال طراحی یک روش گسسته‌سازی دقیق برای حل عددی مسأله براتوی یک-بعدی و دو-بعدی هستیم. برای این منظور، ابتدا با استفاده از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده غیر استاندارد برای گسسته‌سازی مشتق مرتبه دوم، این مسأله به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود. سپس برای حل دستگاه غیرخطی حاصل، از روش تکراری نیوتن استفاده می‌شود. روش ارائه شده همگرایی سریع دارد و به سادگی قابل پیاده‌سازی است و دارای مرتبه همگرایی چهار برای یافتن جواب‌های پایینی و بالایی مسأله براتو است. شبیه‌سازی‌های عددی و نتایج مقایسه‌ای برای حالت‌های یک و دو-بعدی مسأله براتو تایید می‌کنند که این روش دقیق‌تر از روش‌های عددی موجود است.

واژه‌های کلیدی: روش تفاضلات متناهی فشرده غیر استاندارد، مرتبه دقت بالا، مسأله براتوی غیرخطی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به پاس تمامی زحمات بی دریغشان!

آنانکه در یکایک لحظه‌های زندگی همواره پشتیبان و همدم من بوده‌اند!

آنانکه دعا‌های خالصانه‌شان همواره راهگشا و امید بخش زندگی من بوده است!

به راستی که هیچ واژه‌ای قادر به تحسین و ستایش بزرگی و عظمت شما نیست!

در برار وجود پربرکتان سرتعظیم فرودآورده و دستان پرمهرتان را می‌بوسم!

وجود مهربانتان همیشه پاینده و استوار باد!

سپاس‌گزاری

سپاس‌ خدای را که سخوران، در ستودن او بماند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزارش ندهند و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم‌آنان که وجودمان و امدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

به مصداق ”من لم یسکر المخلوق لم یسکر الخالق“ بسی شایسته است از زحمات اساتذات‌های فرهیخته و ابرجمند جناب آقای دکتر حاجی‌پور که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، مرا مرهون هدایت و راهنمایی‌های ارزشمند خویش نمودند و از هیچ‌کلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند، صمیمانه شکر و قدردانی نمایم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر فرضی و جناب آقای دکتر مختاری که بر من منت نهاده و داوران این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، سپاسگزارم.

در انتها از خانواده محترم که همیشه در همه حال یار و یکرهم بوده‌اند، شکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

ب	فهرست تصاویر
پ	فهرست جداول
۱	پیش‌گفتار
۶	۱ روش‌های عددی برای گسسته‌سازی مسأله براتو
۷	۱-۱ مقدمه
۷	۱-۲ مسأله براتو
۱۲	۲ نتایج عددی
۱۳	۲-۰-۱ حالت یک-بعدی
۲۰	۳ نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۲۲	۳-۱ مقادیر ویژه ماتریس‌های نواری
۲۴	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۸	مراجع

فهرست تصاویر

- ۱-۱ شاخه‌های بالایی و پایینی انشعاب متناظر با جواب مسأله براتو (۱-۳). ۹
- ۲-۱ برای $\lambda = 0/5, 1, 2, 3, 3/5$ و $\lambda = \lambda_c$ ، نمودار جواب تقریبی INCFD برای مسأله یک-بعدی براتو، وقتی که $N = 80$ و $r = 7$ ۱۷
- ۲-۲ (آ) لگاریتم خطای L^∞ حاصل از روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های بالایی از مسأله یک-بعدی براتو (۱-۲)، (ب) ماهیت انشعابی از جواب برای مسأله براتو یک-بعدی (۱-۲). ۱۹

فهرست جداول

- ۲-۱ برای $\lambda = 0.5, 1, 2, 3/5$ ماکزیمم خطا، مرتبه دقت و زمان محاسباتی روش تکراری پیشنهادی پس از $r = 7$ تکرار برای حل مسأله براتو هنگامی که $[0, 1]$ به N زیربازه تقسیم می‌شود. . . . ۱۵
- ۲-۲ به‌ازای مقادیر $\lambda = 1, 2$ ، جواب واقعی و تقریبی (پایینی و بالایی)، روش INCFD پس از $r = 11$ تکرار برای مسأله یک-بعدی براتو هنگامی که دامنه $[0, 1]$ به 100 زیربازه تقسیم می‌شود. ۱۶
- ۲-۳ به‌ازای مقدار بحرانی $\lambda_c = 3/5138307192516$ ، ماکزیمم خطا، مرتبه دقت و زمان محاسباتی حاصل از روش INCFD پس از $r = 9, 10, 11$ تکرار برای حل مسأله یک-بعدی هنگامی که دامنه $[0, 1]$ به N تقسیم می‌شود. ۱۷
- ۲-۴ مقایسه خطای L^∞ با برای روش‌های مختلف برای پیدا کردن جواب‌های پایینی از مسأله براتو با مقادیر $\lambda = 1, 2, 3/5$ و $\lambda = \lambda_c$. نماد \times بدین معنی است که نتیجه عددی برای مورد گزارش نشده است. ۱۸

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل به‌عنوان ابزار مهمی در مدل‌سازی بسیاری از مسائل مهندسی و فیزیکی همچون پیش‌بینی وضعیت آب و هوا، اکتشافات زمین‌شناسی، کاربردهای زیستی و غیره استفاده می‌شوند. اغلب این معادلات دیفرانسیل نسبت به متغیرهای وابسته غیرخطی می‌باشند، لذا پیدا کردن جواب‌های تحلیلی برای آن‌ها به سادگی امکان‌پذیر نیست و در اغلب موارد تنها برای حالت‌های خاصی همراه با شرایط مرزی و اولیه می‌توان جواب تحلیلی برای این نوع معادلات ارائه کرد. روش‌های تفاضلات متناهی^۱ به‌عنوان اولین دسته و یکی از متداول‌ترین روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معمولی و کسری مطرح می‌باشد، که اساس کار آن استفاده هنرمندانه از بسط تیلور است. این روش‌ها جواب معادله دیفرانسیل را روی نقاط واقع بر روی یک شبکه‌بندی تقریب می‌زنند. اما یکی از مشکلات اساسی این روش، دقت پایین آن‌ها است که برای رفع این عیب باید از تعداد بیشتری از نقاط شبکه در طرح تفاضلی استفاده کرد که نه‌تنها باعث افزایش پهنای نوار ماتریس نهایی می‌شود و هزینه‌ی محاسبات را افزایش می‌دهد بلکه در نقاط مرزی با پیچیدگی محاسباتی بیشتری مواجه می‌شویم. برای بالا بردن دقت و کارایی روش‌های تفاضلات متناهی اخیراً روش‌های تفاضلات متناهی فشرده^۲ پیشنهاد گردیده است. روش تفاضلات متناهی فشرده دارای طرحی مشابه روش‌های تفاضلات متناهی کلاسیک هستند با این تفاوت که مرتبه دقت بالاتری را با استفاده از تعداد نقاط کمتر به‌دست می‌دهند. به‌طوری

^۱Finite Difference Method

^۲Compact Finite Difference Method

کلی‌مزیت‌های اصلی روش‌های تفاضلات متناهی فشرده نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی کلاسیک عبارتند از:

- روش‌های تفاضلات متناهی فشرده، دقت بسیار بالا با هزینه محاسباتی پایین‌تر نسبت به روش‌های تفاضلات متناهی کلاسیک دارند.
- روش‌های تفاضلات متناهی فشرده برای تقریب مشتقات به تعداد گره‌های محاسباتی محدودتری نیاز دارند.
- روش‌های تفاضلات متناهی فشرده به عملیات ریاضی کمتری نیاز دارند.
- در روش‌های تفاضلات متناهی فشرده شرایط مرزی را می‌توان به آسانی و بدون نیاز به نقاط اضافی اعمال نمود.

به علت کارایی، دقت بالا، فشرده‌گی و همچنین مزیت‌های فوق در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های تفاضلات متناهی فشرده در انواع گوناگونی از مسائل مهندسی از جمله دینامیک سیالات، صوت‌شناسی، الکترومغناطیس و افزایش یافته است. همچنین توجه زیادی به روش‌های تفاضلات متناهی فشرده مرتبه بالا برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی-کسری شده است.

در سال ۱۹۵۶، داگلاس^۱ نخستین روش تفاضلات متناهی فشرده را با ترکیب تقریب پاده و روش تفاضلات متناهی برای ارتقای مرتبه‌ی همگرایی روش کرانک-نیکلسون در حل معادله گرما ابداع نمود [۲۲]. سپس کلاتز^۲ در [۱۷] به طور جدی به بررسی حل معادلات دیفرانسیل به کمک روش تفاضلات متناهی فشرده پرداخت و روشی موسوم به روش تفاضلات متناهی هرمیتی را ارائه کرد. کولن^۳ نیز در سال ۱۹۷۴ و در حین کار با روش گالرکین، طرحی برای محاسبه‌ی تقریبی برای مشتق مرتبه اول ابداع نمود [۱۸]. بعد از آن‌ها، هیرش^۴ نیز در سال ۱۹۷۵ معادلاتی را در زمینه‌ی مکانیک سیالات با استفاده از

¹Douglas²Collatz³Cullen⁴Hirsh

روش‌های تفاضلات متناهی فشرده با بالاترین درجه‌ی دقت در آن زمان حل نمود [۲۸]. سیمنت^۱ طرح تفاضلی ضمنی فشرده را با مرتبه‌ی بالا برای محاسبه‌ی جواب معادله موج به کار برد [۱۵] و در سال ۱۹۷۸ این طرح را برای حل معادلات سهموی مورد استفاده قرار داد [۱۶]. در سال ۱۹۹۲ لِیل^۲ مقاله‌ای منتشر کرد که در آن حالت‌های کلی طرح ساخت این گونه روش‌ها را مورد بررسی قرار داد [۳۵]. به تازگی در [۵۸، ۵۹] با به کار بردن روش‌های تفاضلات متناهی فشرده، روش‌هایی برای حل معادله‌های برگرز و شرودینگر معرفی شده است که از دقت بیشتری نسبت به دیگر روش‌ها برخوردار هستند.

امروزه با گسترش علوم و مدل‌سازی مسائل مختلف به صورت مسائل غیرخطی، علاقه و نیاز به روش‌های تحلیلی و عددی برای حل این مدل‌ها روزبه‌روز در حال افزایش است. از آنجایی که حل مسائل غیرخطی همواره مورد چالش است یافتن روش‌هایی که به وسیله آن بتوان مسائل غیرخطی را حل نمود از اهداف دانشمندان علوم ریاضی و مهندسی است. از افرادی که در این خصوص تلاش مفید و مؤثری داشتند جورج آدومیان^۳ بود که در قالب یک مجموعه مدون برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ اثر خودش را به چاپ رساند [۲]. وی در کتاب خود به ارائه روش تجزیه جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی با شرایط بسیار پیچیده و همچنین گونه‌ی جدیدی از روش تجزیه پرداخت. از طرفی دیگر استفاده از روش‌های تفاضلات متناهی برای برای گسسته‌سازی کلاسیک معادلات دیفرانسیل غیرخطی (به دلیل حضور جملات غیرخطی) موجب بروز ناپایداری عددی در جواب تقریبی می‌شود. از این رو پروفیسور رونالد میکنز^۴ برای اولین بار در سال ۱۹۹۴ روش‌هایی ساده و کاربردی را بر مبنای روش‌های تفاضل متناهی کلاسیک، برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه کرد [۳۸]. این روش‌ها، موسوم به روش‌های تفاضل متناهی غیراستاندارد هستند، ناپایداری عددی موجود در جواب تقریبی حاصل از روش‌های تفاضل متناهی را رفع می‌نماید. ایشان برای طراحی این روش‌ها برخی قواعد اساسی ارائه کرد و سپس به بررسی طیفی

^۱Ciment^۲Lele^۳Adomian^۴Mickens

گسترده از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی پرداخت. در دهه‌های اخیر از روش‌های تفاضلات متناهی غیراستاندارد برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های غیرخطی از قبیل نقاط تعادل و پایداری‌شان، مثبت بودن و کراندار بودن جواب استفاده شده است [۳۹].

مسئله براتو یکی از مسائل مقدار مرزی غیرخطی است که در سال‌های اخیر توسط محققان به‌عنوان یک مسئله تست به منظور ارزیابی دقت همگرایی روش‌های تقریبی پیشنهادی‌شان مورد توجه قرار گرفته است. طیف گسترده‌ای از مسائل در فیزیک و شیمی و مهندسی توسط معادله براتو توصیف می‌شوند. از میان این کاربردها می‌توان به واکنش گرمایی در موارد دگردیسی ناپذیر (اشتعال سوخت جامد) اشاره کرد [۲۹]. این مسئله متشکل از یک معادله دیفرانسیل حاوی یک جمله غیرخطی مبتنی بر تابع نمایی و مشتقات مرتبه دوم است که گسسته‌سازی این مسئله را بسیار پیچیده نمود است. به‌علاوه این مسئله حاوی یک پارامتر حقیقی آزاد است که با تغییر آن ممکن است مسئله داری یک جواب، دو جواب و یا هیچ جوابی نباشد. در این پایان‌نامه، ابتدا نحوه ساخت روش‌های تفاضلات متناهی فشرده ارائه می‌شود و سپس با کمک یک طرح تفاضلاتی غیر استاندارد برای مشتقات مرتبه دوم، یک روش عددی با مرتبه دقت بالا برای یافتن جواب‌های مسئله براتو فرمول‌بندی می‌شود [۲۶].

این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد که در فصل اول برخی فرمول‌های تفاضلات متناهی پرکاربرد معرفی می‌شوند. سپس در فصل دوم نحوه طراحی فرمول‌های تفاضلات متناهی فشرده مبتنی بر رویه‌های کولاتز و لیل معرفی می‌شوند. در فصل سوم با استفاده از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده غیر استاندارد مرتبه چهار، یک روش عددی دقیق و ساده برای یافتن جواب‌های پایینی و بالایی مسئله براتو فرمول‌بندی می‌شود. نتایج عددی و مقایسه‌ای بیانگر کارایی و دقیق‌تر بودن این روش در مقایسه با سایر روش‌های تقریبی است. در نهایت در فصل چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادات بیان می‌شوند. مفاهیم و مطالب اصلی این پایان‌نامه برگرفته از مقاله

M. Hajipour, A. Jajarmi, D. Baleanu, On the accurate discretization of a highly non-linear boundary value problem, Numer. Algor. 79 (2018) 679–695.

می باشد.

فصل اول

روش‌های عددی برای گسسته‌سازی مسأله براتو

۱-۱ مقدمه

مسأله براتو متشکل از یک معادله دیفرانسیل بیضوی غیرخطی همراه با شرایط مرزی دریکله^۱ می‌باشد، که در ساده‌سازی مدل احتراق سوخت جامد در تئوری حرارتی برای اولین بار دیده شده است [۱۰]. این مسأله به‌طور گسترده به‌عنوان یک معیار برای آزمایش دقت بسیاری از تکنیک‌های تحلیلی و عددی به‌کار می‌رود. این مدل کاربردهای فراوانی در پدیده‌های فیزیکی مختلف از قبیل نانو تکنولوژی، انتقال حرارت تابشی، نظریه واکنش شیمیایی، مدل احتراق سوخت و فرآیند واکنش حرارتی دارد. در سال ۱۹۹۷ ژاکوبین و اشمیت به بررسی اهمیت و تاریخ این مسأله پرداخته‌اند [۲۹].

۱-۲ مسأله براتو

در این فصل، یک روش عددی دقیق و ساده برای حل معادله براتو [۹] که به‌شکل زیر است، ارائه می‌دهیم:

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) + \lambda \exp(u(\mathbf{x})) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1-1) \text{ الف} \\ (1-1) \text{ ب} \end{matrix}$$

که λ یک عدد حقیقی مثبت است و Ω یک دامنه محدود در \mathbb{R}^n است. به‌علاوه، Δ نشان‌دهنده عملگر لاپلاس n -بعدی می‌باشد. مسأله براتو یک مسأله مقدار مرزی غیرخطی (BVP) است و به‌طور گسترده به‌عنوان یک معیار برای آزمایش دقت همگرایی بسیاری از تکنیک‌های تحلیلی و عددی به‌کار می‌رود. این مدل در تعدادی از کاربردها مانند نانو تکنولوژی، انتقال حرارت تابشی، نظریه واکنش شیمیایی، مدل

¹Homogeneous Dirichlet Boundary Conditions

احتراق سوخت، فرایند واکنش حرارتی، روش چاندرساخار و غیره [۱۴] ظاهر می‌شود. مسأله کلاسیک یک-بعدی براتو (که به مسأله براتو-گلفند نیز معروف است) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda \exp(u(x)) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (۱-۲) \text{ الف} \\ (۱-۲) \text{ ب} \end{matrix}$$

جواب دقیق معادله (۱-۲) به صورت زیر می‌باشد

$$u(x) = -2 \ln \left(\frac{\cosh(\frac{\theta}{4}(x - \frac{1}{4}))}{\cosh(\frac{\theta}{4})} \right), \quad (۱-۳)$$

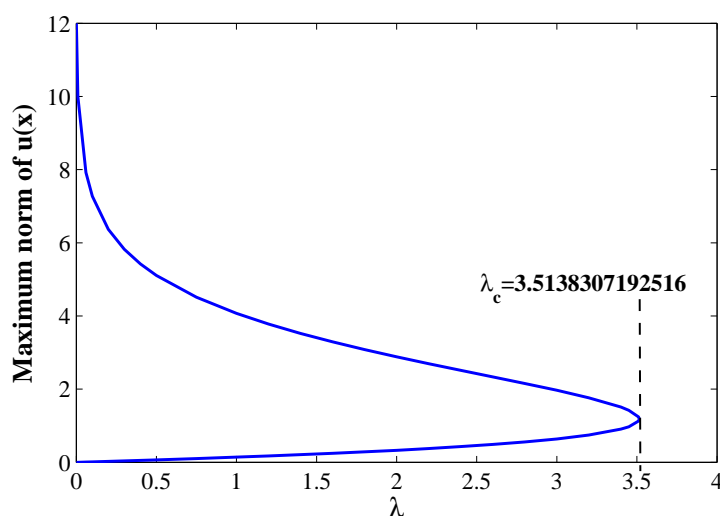
به طوری که θ در رابطه

$$\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

صدق می‌کند. مسأله براتو (۱-۲) برای $\lambda > \lambda_c$ ، $\lambda = \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ به ترتیب دارای صفر، یک و دو جواب می‌باشد، که در آن λ_c مقدار بحرانی بوده و در معادله زیر صدق می‌کند،

$$1 = \frac{1}{4} \sqrt{2\lambda_c} \sinh\left(\frac{\theta}{4}\right),$$

یک مقدار تقریبی برای این مقدار بحرانی برابر با $\lambda_c = 3.5138307192516$ است. نمودار ماکزیمم قدر مطلق جواب $u(x)$ مسأله (۱-۳) نسبت به مقدارهای مختلف λ ، که نشان‌دهنده‌ی انشعاب‌های بالایی و پایینی جواب است، در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که منحنی انشعاب،



شکل ۱-۱ - شاخه‌های بالایی و پایینی انشعاب متناظر با جواب مسأله براتو (۱-۳).

مشکل از دو شاخه بالایی و پایینی در فاصله $\lambda_c < \lambda < \infty$ است. در حقیقت برای هر مقدار $\lambda < \lambda_c$ ، مسأله براتو دارای دو جواب است؛ گروه اول بر روی شاخه پایینی و گروه دوم بر روی شاخه بالایی قرار دارد. در دو دهه‌ی گذشته، روش‌های تقریبی مختلفی از جمله تفاضلات متناهی میکنز [۴۲]، پرتابی [۱۰]، لاپلاس [۳۳]، اسپلین [۱۱]، شبه طیفی [۸، ۷]، تجزیه [۲۰]، اختلال در آشفستگی [۳]، تجزیه لاپلاس آدومیان [۵۲]، باقی‌مانده وزنی [۵۳]، شبه خطی سازی [۴۴]، تابع گرین [۴۰]، موجک [۶۱، ۳۷]، موجک گالرکین [۴۷]، تکرار چند مرحله‌ای [۵۶]، سینک-گالرکین [۴۶]، اسپلین پارامتری [۶۲]، غیرچند جمله‌ای اسپلین [۳۰]، تفاضلات متناهی تکراری [۵۴]، شبکه عصبی [۳۴]، تجزیه و تحلیل هموتوپي [۳۶] و روش ذرات پرتابی [۶۰] ارائه شده‌است. همچنین جواب تقریبی حاصل شده با جواب دقیق مسأله براتو نیز مقایسه شده‌اند. اغلب روش‌های ارائه شده برای هر مقدار مختلف از λ همگرا به جواب پایینی (متناظر با شاخه پایینی) می‌شوند، که در آن $\lambda_c < \lambda < \infty$. همان‌طور که در [۷] اشاره شد، پیچیدگی یافتن جواب بالایی (متناظر با شاخه بالایی) مربوط به تکنیکی است که ممکن است با کم کردن جواب مجانبی، حذف شده باشد. علاوه‌براین، روش‌های ذکر شده در بالا دقت‌شان را هنگامی که

λ به λ_c نزدیک می‌شود، از دست می‌دهند. اخیراً روش‌های عددی کارآمدی از قبیل روش تفاضلات متناهی غیراستاندارد [۴۲]، روش پرتابی غیرخطی [۱۰]، روش شبه‌طیفی بوید [۷، ۸]، روش تحلیل هموتویی [۳۶] و روش MG [۱۳] موفق به تقریب شاخه‌های پایینی و بالایی شده‌اند؛ با این حال، هیچ یک از آن‌ها به‌طور دقیق به جواب مسأله براتو همگرا نشده‌اند، به‌خصوص هنگامی که $\lambda = \lambda_c$ [۲۵، ۴۲، ۴۵].

بنابراین، طراحی یک روش تقریبی دقیق و با پیاده‌سازی آسان برای یافتن جواب‌های بالایی و پایینی و همچنین جواب بحرانی متناظر با $\lambda = \lambda_c$ برای مسأله براتو حائز اهمیت ویژه‌ای است. روش‌های تفاضلات متناهی فشرده یکی از روش‌های عددی کارا برای گسسته‌سازی فضایی (مکانی) معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی و جزئی است. این تکنیک‌ها دقت بالایی برای تخمین مشتق‌ها دارند و در مقایسه با تقریب‌های سنتی (تفاضلات متناهی استاندارد) دقیق‌تر و پایدارتر هستند [۳۵]. روش تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم که برای گسسته‌سازی مشتقات مرتبه دوم به کار می‌رود ماهیت سه قطری بودن مطلوب فرمول تفاضلات متناهی مرتبه دوم را حفظ می‌کند. بنابراین، هزینه محاسباتی این روش مشابه روش تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم است، در حالی که مرتبه دقت آن چهار است. در این فصل ابتدا به بررسی برخی روش‌های گسسته‌سازی مبتنی بر فرمول‌های تفاضلات متناهی استاندارد و غیر استاندارد برای حل عددی مسأله براتو یک-بعدی می‌پردازیم. سپس به بررسی یک روش عددی دقیق و ساده برای یافتن جواب‌های پایینی و بالایی مسأله براتو در حالت یک، دو و سه-بعدی و همچنین جواب حدی متناظر با $\lambda = \lambda_c$ خواهیم پرداخت. از این‌رو، یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم را برای گسسته‌سازی مشتق مرتبه دوم فرمول‌بندی شده است. با توجه به این که روش‌های تقریبی مبتنی بر فرمول‌های تفاضلات متناهی استاندارد ارائه شده برای مسأله براتو تنها به جواب پایینی همگرا می‌شوند. لذا در این فصل یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده با استفاده از یک چارچوب غیراستاندارد می‌کنز فرمول‌بندی شده است [۴۲، ۱۰]. با گسسته‌سازی معادله براتو با استفاده از این فرمول تفاضلات متناهی

فشرده غیراستاندارد، یک سیستم جبری غیرخطی به دست می‌آید. به علاوه برای حل این سیستم جبری غیرخطی، از یک روش تکراری سریع و دقیق که مبتنی بر روش نیوتن-رافسون است استفاده می‌شود. این روش تکراری غیراستاندارد دارای مرتبه دقت همگرایی چهار است و همچنین در یافتن جواب‌های پایینی، بالایی و بحرانی مسأله براتو بسیار دقیق است. همچنین از روش پیشنهادی برای گسسته‌سازی این مسأله در حالت دو-بعدی استفاده شده است. نتایج مقایسه‌ای ارائه شده نشان می‌دهد که این روش جدید نه تنها برای یافتن جواب‌های پایینی، بالایی و بحرانی موفق است بلکه این روش در مقایسه با سایر روش‌های تقریبی ارائه شده در تحقیقات اخیر بسیار دقیق‌تر است.

فصل دوم

نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از روش عددی مبتنی بر روش‌های تکراری نیوتن-رافسون و تفاضلات متناهی فشرده غیر استاندارد برای حل مسأله براتو یک-بعدی و دو-بعدی به ازای مقادیر مختلف λ ارائه شده است. در ادامه، روش ترکیبی تکراری ارائه شده به‌طور خلاصه با نماد INCFD نشان داده می‌شود. به‌علاوه نتایج عددی حاصل از این روش نیز با برخی از روش‌های تقریبی که اخیراً معرفی شده‌اند، مقایسه می‌شود. تمام نتایج عددی با استفاده از نرم‌افزار متلب انجام شده است.

۲-۰-۱ حالت یک-بعدی

مسأله یک-بعدی براتو را که توسط (۱-۲) ارائه شده است، در نظر بگیرید و فرض کنید که $u(x_i)$ و u_i به‌ترتیب جواب دقیق به‌دست آمده از (۱-۳) و جواب تقریبی روش INCFD در x_i باشند. ماکزیم خطای بین جواب‌های دقیق و تقریبی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L^\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)|.$$

همان‌طور که می‌دانیم روش تکراری نیوتن-رافسون نسبت به انتخاب حدس اولیه حساس است، به‌عبارتی دیگر همگرایی این روش در صورتی تضمین می‌شود که حدس اولیه به اندازه کافی به جواب معادله غیرخطی نزدیک باشد. برای مقادیر مختلف λ ، تابع حدس اولیه به‌صورت

$$u^{[0]} = \alpha(x - x^2),$$

که در آن ضریب پیشرو α متناظر با جواب بالایی و پایینی متفاوت انتخاب می‌شود. برای یافتن جواب پایینی، مقدار α به صورت

$$\alpha \leq u_c = \max\{u(x) : 0 \leq x \leq 1, \lambda = \lambda_c\},$$

در نظر گرفته می‌شود، در حالی که با انتخاب α به صورت $\alpha > u_c$ روش عددی پیشنهادی همگرا به جواب بالایی می‌باشد. به عنوان مثال، برای $\lambda \in (0, \lambda_c)$ تابع حدس اولیه $u_L^{[0]}(x) = \frac{\lambda}{45}(x-x^2)$ برای یافتن شاخه پایینی استفاده می‌شود. همچنین برای شاخه بالایی تابع $u_U^{[0]}(x) = \frac{25}{1+\lambda}(x-x^2)$ به عنوان حدس اولیه برای هر مقدار $\lambda \in (0/1, \lambda_c)$ انتخاب می‌شود. برای $\lambda = 0/5, 1, 2, 3/51$ ، ماکزیم خطای بین جواب واقعی و تقریبی، مرتبه دقت و زمان محاسباتی حاصل از روش تکراری (؟؟) پس از $r=7$ تکرار برای حل مسأله یک-بعدی براتو هنگامی که دامنه $[0, 1]$ به $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$ زیربازه تقسیم شده است در جدول ۲-۱ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی روش پیشنهادی چهار است که مطابق با نتایج تحلیلی است.

همچنین جدول ۲-۱ نشان می‌دهد که روش جدید INCFD بسیار سریع و از نظر محاسباتی کارآمد است. برای $N = 640$ این روش فقط به $0/21$ ثانیه زمان محاسباتی نیاز دارد تا به جواب تقریبی با ماکزیم

خطای

$$1/2692 \times 10^{-15}, 1/5502 \times 10^{-14}, 1/4502 \times 10^{-13}, 5/4502 \times 10^{-11},$$

به ترتیب به ازای $\lambda = 0/5, \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3/51$ همگرا شود.

شکل ۲-۲ جواب عددی (پایینی، بالایی) به دست آمده از طرح پیشنهادی INCFD را در مقایسه با

جدول ۲-۱ - برای $\lambda = 0.5, 1, 2, 3.51$ ماکزیمم خطا، مرتبه دقت و زمان محاسباتی روش تکراری پیشنهادی پس از $r = 7$ تکرار برای حل مسأله براتو هنگامی که $[0, 1]$ به N زیربازه تقسیم می‌شود.

زمان	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$		$\lambda = 2$		$\lambda = 3.51$		N
	خطا	مرتبه	خطا	مرتبه	خطا	مرتبه	خطا	مرتبه	
$4.5e-4$	$7.08e-05$	4.00	$2.42e-07$	4.00	$1.84e-08$	4.00	$1.91e-09$	4.00	20
$1.2e-3$	$4.42e-06$	4.00	$1.51e-08$	4.00	$1.15e-09$	4.00	$1.20e-10$	4.00	40
$3.2e-3$	$2.76e-07$	4.00	$9.45e-10$	4.00	$7.20e-11$	4.00	$7.47e-12$	4.00	80
$1.6e-2$	$1.72e-08$	4.00	$5.90e-11$	4.00	$4.38e-12$	4.04	$4.15e-13$	4.17	160
$8.2e-2$	$9.96e-10$	4.12	$2.94e-12$	4.33	$2.60e-13$	4.07	$2.31e-14$	4.17	320
$2.0e-1$	$5.45e-11$	4.19	$1.45e-13$	4.34	$1.55e-14$	4.07	$1.27e-15$	4.18	640

جواب دقیق ارائه شده توسط (۱-۳) که در آن $r = 11$ و $N = 100$ است را نشان می‌دهد. از جدول

۲-۳ مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن λ به مقدار بحرانی λ_c ماکزیمم خطا بزرگتر می‌شود. همچنین

به‌ازای مقدار بحرانی 3.5138307192516 ، $\lambda = \lambda_c$ ، نتایج عددی روش جدید پس از $r = 9, 10, 11$

تکرار در جدول ۲-۴ نشان داده شده است که در آن دامنه $[0, 1]$ به $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$

زیر بازه تقسیم شده است. این جدول نشان می‌دهد که روش INCFD مطرح شده برای یافتن جواب

تقریبی مسأله یک-بعدی براتو هنگامی که $\lambda = \lambda_c$ باشد، نیاز به تکرار بیشتری دارد و پس از $r = 11$

تکرار، با ماکزیمم خطای $10^{-10} \times 4/11$ و زمان سپری شده 0.5720 ثانیه همگرا می‌شود. در جدول

۲-۴، نتایج عددی ارائه شده با روش تفاضلات متناهی غیراستاندارد [۴۲]، روش تفاضلات متناهی

میکنز [۱۰]، روش تجزیه لاپلاس [۳۳]، روش اسپلاین [۱۱]، رویکرد تجزیه [۲۰]، طرح گروه لی [۱]،

تکنیک واریاسیون [۱۹]، روش موجک [۳۷]، روش گالرکین [۴۶]، تکنیک اسپلاین پارامتری [۶۲]،

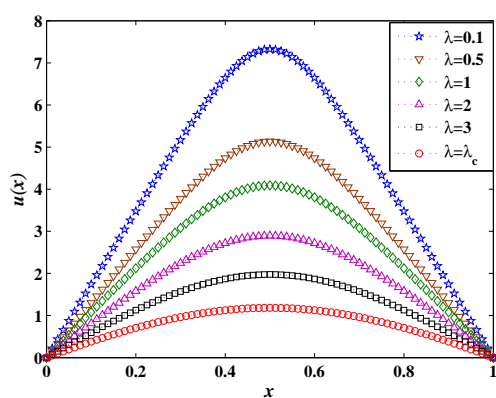
روش اسپلاین غیرچندجمله ای [۳۰]، روش تفاضلات متناهی تکراری [۵۴]، شبکه عصبی [۳۴]،

جدول ۲-۲ - به‌ازای مقادیر $\lambda = 1, 2$ ، جواب واقعی و تقریبی (پایینی و بالایی)، روش *INCFD* پس از $r = 11$ تکرار برای مسئله یک-بعدي براتو هنگامی که دامنه $[0, 1]$ به ۱۰۰ زیربازه تقسیم می‌شود.

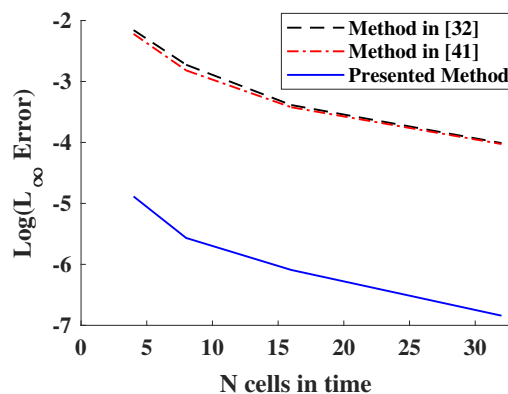
x	جواب واقعی (پایینی، بالایی) برای $\lambda = 1$	جواب تقریبی (پایینی، بالایی) برای $\lambda = 1$
۰/۱	(۰/۷۷۲۷۳۳۱۶۷۹۶۷۳۹, ۰/۴۹۸۴۶۷۹۱۲۴۶۷۷۵)	(۰/۷۷۲۷۳۳۱۰۶۲۰۷۴۱, ۰/۴۹۸۴۶۷۹۱۲۴۶۷۷۵)
۰/۲	(۰/۸۹۱۸۹۹۳۴۶۲۸۸۲۳, ۰/۱۲۲۳۹۲۳۴۱۰۵۲۷۴۵)	(۰/۸۹۱۸۹۹۳۴۶۳۱۳۹۸, ۰/۱۲۲۳۹۲۳۲۷۳۳۷۷۷۳)
۰/۳	(۰/۱۱۷۶۰۹۰۹۵۷۶۷۹۴۱, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۱۰۰۵۶۹۹۶۶)	(۰/۱۱۷۶۰۹۰۹۵۷۷۱۴۸۰, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۰۸۱۱۶۰۷۴۵)
۰/۴	(۰/۱۳۴۷۹۰۲۵۳۸۸۴۱۹۰, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۸۹۳۶۶۲۷)	(۰/۱۳۴۷۹۰۲۵۳۸۸۳۴۹, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۸۹۳۶۶۲۷)
۰/۵	(۰/۱۴۰۵۳۹۲۱۴۴۰۰۴۷۲, ۰/۴۰۹۱۴۶۷۲۴۵۱۳۷۱۱۲)	(۰/۱۴۰۵۳۹۲۱۴۴۰۰۴۸۵, ۰/۴۰۹۱۴۶۷۲۵۹۷۳۳۶۵۲)
۰/۶	(۰/۱۳۴۷۹۰۲۵۳۸۸۴۱۹۰, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۸۹۳۶۶۲۷)	(۰/۱۳۴۷۹۰۲۵۳۸۸۳۶۳, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۸۹۳۶۶۲۷)
۰/۷	(۰/۱۱۷۶۰۹۰۹۵۷۶۷۹۴۱, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۱۰۰۵۶۹۹۶۶)	(۰/۱۱۷۶۰۹۰۹۵۷۷۱۵۰۲, ۰/۳۰۷۷۳۹۵۰۸۱۱۶۳۰۱۱)
۰/۸	(۰/۸۹۱۸۹۹۳۴۶۲۸۸۲۳, ۰/۱۲۲۳۹۲۳۴۱۰۵۲۷۴۵)	(۰/۸۹۱۸۹۹۳۴۶۳۱۴۲۴, ۰/۱۲۲۳۹۲۳۲۷۳۳۹۶۷۳)
۰/۹	(۰/۷۷۲۷۳۳۱۶۷۹۶۷۳۹, ۰/۴۹۸۴۶۷۹۱۲۴۶۷۷۵)	(۰/۷۷۲۷۳۳۱۰۶۲۱۷۹۸, ۰/۴۹۸۴۶۷۹۱۲۴۶۷۷۵)
x	جواب واقعی (پایینی، بالایی) برای $\lambda = 2$	جواب تقریبی (پایینی، بالایی) برای $\lambda = 2$
۰/۱	(۰/۸۱۳۴۷۴۶۰۹۳۳۸۲۶۷, ۰/۱۱۴۴۱۰۷۴۳۲۶۷۷۴۶)	(۰/۸۱۳۴۷۴۶۰۵۹۱۳۵۶۲, ۰/۱۱۴۴۱۰۷۴۳۲۸۳۵۶۵)
۰/۲	(۰/۲۰۶۴۱۹۱۱۶۴۸۷۶۰۹, ۰/۵۷۹۶۱۱۸۵۲۸۶۵۸۰۰)	(۰/۲۰۶۴۱۹۱۱۶۵۱۹۵۶۸, ۰/۵۷۹۶۱۱۸۴۶۰۵۸۸۲۰)
۰/۳	(۰/۲۷۳۸۷۹۳۱۱۸۲۵۵۵۲, ۰/۲۴۵۲۵۸۲۱۶۵۳۴۸۰۰)	(۰/۲۷۳۸۷۹۳۱۱۸۷۱۶۹۱, ۰/۲۴۵۲۵۸۲۰۸۷۹۵۷۱۷)
۰/۴	(۰/۳۱۵۰۸۹۳۶۴۲۲۵۶۷۰, ۰/۲۷۱۹۸۰۶۵۸۱۶۶۸۴۲۷)	(۰/۳۱۵۰۸۹۳۶۴۲۸۱۵۸۵, ۰/۲۷۱۹۸۰۶۵۷۹۰۳۴۷۳۷)
۰/۵	(۰/۳۲۸۹۵۲۴۲۱۳۴۱۱۱۳, ۰/۲۸۹۵۵۳۱۲۶۵۶۳۲۲۳۴)	(۰/۳۲۸۹۵۲۴۲۱۴۰۰۵۰۷, ۰/۲۸۹۵۵۳۱۲۶۷۹۷۹۲۰۳)
۰/۶	(۰/۳۱۵۰۸۹۳۶۴۲۲۵۶۷۰, ۰/۲۷۱۹۸۰۶۵۸۱۶۶۸۴۲۷)	(۰/۳۱۵۰۸۹۳۶۴۲۸۱۵۳۴, ۰/۲۷۱۹۸۰۶۵۷۹۰۳۴۵۶۲)
۰/۷	(۰/۲۷۳۸۷۹۳۱۱۸۲۵۵۵۲, ۰/۲۴۵۲۵۸۲۱۶۵۳۴۷۹۹)	(۰/۲۷۳۸۷۹۳۱۱۸۷۱۶۰۹, ۰/۲۴۵۲۵۸۲۰۸۷۹۵۵۱۳)
۰/۸	(۰/۲۰۶۴۱۹۱۱۶۴۸۷۶۰۹, ۰/۵۷۹۶۱۱۸۵۲۸۶۵۸۰۰)	(۰/۲۰۶۴۱۹۱۱۶۵۱۹۵۶۸, ۰/۵۷۹۶۱۱۸۴۶۰۵۸۶۰۹)
۰/۹	(۰/۸۱۳۴۷۴۶۰۹۳۳۸۲۶۷, ۰/۱۱۴۴۱۰۷۴۳۲۶۷۷۴۶)	(۰/۸۱۳۴۷۴۶۰۵۹۱۳۴۴۷, ۰/۸۱۳۴۷۴۶۰۵۹۱۳۴۴۷)

جدول ۲-۳ - به ازای مقدار بحرانی $\lambda_c = 3.5138307192516$ ، ماکزیمم خطا، مرتبه دقت و زمان محاسباتی حاصل از روش INCFD پس از $r = 9, 10, 11$ تکرار برای حل مسأله یک-بعدي هنگامی که دامنه $[0, 1]$ به N تقسیم می شود.

N	بعد از $r = 9$ تکرار			بعد از $r = 10$ تکرار			بعد از $r = 11$ تکرار		
	خطا	مرتبه	زمان	خطا	مرتبه	زمان	خطا	مرتبه	زمان
۱۰	$1.22e-03$	-	$9.7e-4$	$1.21e-03$	-	$9.8e-4$	$2.20e-03$	-	$9.9e-4$
۲۰	$4.34e-04$	1.49	$1.0e-3$	$4.11e-04$	1.56	$1.1e-3$	$3.02e-04$	2.87	$3.3e-3$
۴۰	$7.48e-05$	2.54	$1.0e-3$	$8.15e-05$	2.33	$2.1e-3$	$3.58e-05$	3.08	$3.0e-3$
۸۰	$5.55e-06$	3.75	$3.8e-3$	$5.05e-06$	4.01	$4.1e-3$	$2.22e-06$	4.01	$4.8e-3$
۱۶۰	$1.00e-06$	2.46	$2.0e-2$	$3.11e-07$	4.02	$2.5e-2$	$1.37e-07$	4.02	$2.9e-2$
۳۲۰	$4.05e-07$	1.31	$8.5e-2$	$3.48e-08$	3.16	$9.2e-2$	$7.58e-09$	4.17	$9.9e-2$
۶۴۰	$1.01e-07$	2.00	0.4736	$4.03e-09$	3.11	0.5178	$4.11e-10$	4.20	0.5720



(ب) جواب بالایی

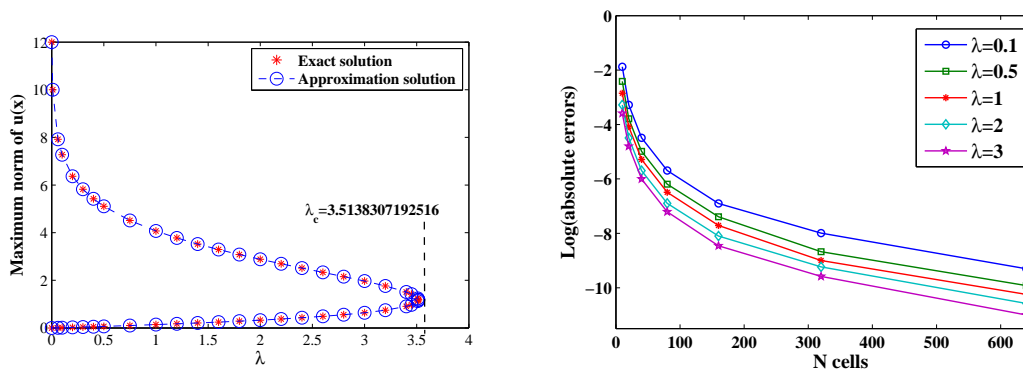


(آ) جواب پایینی

شکل ۲-۱ - برای $\lambda = 0.5, 1, 2, 3, 3.51$ و $\lambda = \lambda_c$ ، نمودار جواب تقریبی INCFD برای مسأله یک-بعدي براتو، وقتی که $N = 80$ و $r = 7$.

جدول ۲-۴ - مقایسه خطای L^∞ با برای روش‌های مختلف برای پیدا کردن جواب‌های پایینی از مسأله براتو با مقادیر $\lambda = 1, 2, 3/5$ و $\lambda = \lambda_c$. نماد \times بدین معنی است که نتیجه عددی برای مورد گزارش نشده است.

روش	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3/5$	$\lambda_c = 3/5138307192516$
FD غیراستاندارد	$1/00e-04$	$1/00e-03$	$2/00e-02$	$1/00e-01$
FD میکنز	$2/00e-08$	$3/30e-08$	$2/32e-05$	$4/00e-03$
تجزیه لاپلاس	$1/35e-05$	$1/24e-02$	\times	\times
اسپلین	$8/89e-06$	$5/56e-05$	$1/35e-01$	\times
تجزیه	$2/69e-03$	$1/52e-02$	\times	\times
گروه-لی	$1/01e-06$	$5/67e-06$	$7/12e-05$	\times
تغییراتی	$4/22e-05$	$1/41e-03$	\times	\times
موجک	$4/71e-11$	$8/38e-11$	$3/30e-08$	\times
سینک-گالرکین	$6/50e-12$	$1/80e-11$	$3/90e-11$	\times
اسپلین پارامتری	$5/87e-10$	$3/53e-08$	\times	\times
اسپلین غیرچندجمله ای	$5/77e-10$	$2/60e-08$	$6/89e-06$	\times
FD تکراری	$5/71e-10$	$2/11e-09$	$6/21e-07$	\times
شبکه عصبی	$3/20e-3$	$4/95e-03$	$1/76e-02$	\times
تجزیه و تحلیل هموتوبی	$1/00e-11$	$2/0e-10$	$1/26e-09$	\times
پرتابی	$1/15e-08$	$6/71e-09$	$3/58e-06$	$6/66e-04$
تابع bvp4c در متلب	$2/47e-07$	$1/33e-06$	$1/43e-02$	$5/10e-02$
تابع NDSolve در ممتیکا	$5/88e-09$	$5/88e-09$	$3/01e-07$	$4/61e-06$
روش پیشنهادی INCFD	$1/55e-14$	$1/45e-13$	$5/45e-11$	$4/11e-10$



(ب) ماهیت انشعابی جواب

(آ) لگاریتم ماکزیمم خطا

شکل ۲-۲ - (آ) لگاریتم خطای L^∞ حاصل از روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های بالایی از مسئله یک-بعدي براتو (۱-۲)، (ب) ماهیت انشعابی از جواب برای مسئله براتو یک-بعدي (۱-۲).

روش آنالیز هموتوپي [۳۶]، روش پرتابی [۶۰]، تابع bvp4c در نرم‌افزار متلب [۴۸] و تابع NDSolve در نرم‌افزار متمتیکا مقایسه می‌شود. همان‌طور که در جدول ۲-۴ مشاهده می‌شود، روش INCFD از سایر روش‌های تقریبی دقیق‌تر است. علاوه بر این، برای حالت $\lambda = \lambda_c$ ، روش INCFD بسیار دقیق است در حالی که سایر روش‌ها نمی‌توانند یک جواب تقریبی قابل توجه و دقیق را به دست آورند. به ازای مقادیر مختلف λ ، جواب‌های تقریبی پایینی و بالایی به دست آمده از طریق روش INCFD در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. ماکزیمم خطای مربوط به این روش برای یافتن جواب‌های بالایی نیز در شکل ۲-۲ (آ) ترسیم شده است. این شکل نشان می‌دهد که روش INCFD برای پیدا کردن جواب بالایی نیز دقیق است. شکل ۲-۲ (ب) ماهیت انشعابی جواب تقریبی (ماکزیمم مقدار جواب‌های بالایی و پایینی نسبت به پارامتر λ) را برای مسئله یک-بعدي براتو نشان می‌دهد که حاصل از روش INCFD می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که انشعاب تقریبی با نمونه دقیق آن کاملاً مطابقت دارد.

فصل سوم

نتیجه گیری و پیشنهادات

نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش ترکیبی مبتنی بر روش‌های تفاضلات متناهی غیر استاندارد و تفاضلات متناهی فشرده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی برای حل معادلات یک-بعدی و دو-بعدی براتو سریع، ساده، دقیق و مؤثر است. همچنین نتایج نشان‌دهنده این است که روش ارائه شده پیشنهادی مبتنی بر فرمول تفاضلات متناهی فشرده برای تقریب هر دو شاخه پایینی و بالایی موفق بوده و تقریب بسیار بهتر از جواب براتو نسبت به سایر روش‌های عددی ارائه شده به دست می‌آورد، که حاکی از اعتبار و کارایی روش جدید ارائه شده است.

ضمیمه‌ها

۳-۱ مقادیر ویژه ماتریس‌های نواری

قضیه ۳-۱-۱. مقادیر ویژه ماتریس سه قطری و حقیقی مقدار $N \times N$

$$\begin{bmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c & a \end{bmatrix}, \quad (3-1)$$

به فرم زیر بدست می‌آیند

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right), \quad 1 \leq s \leq N. \quad (3-2)$$

قضیه ۳-۱-۲. مقادیر ویژه ماتریس پنج قطری و حقیقی مقدار $N \times N$

$$\begin{bmatrix} p-r & 2q & r & & \\ 2q & p-r & 2q & r & \\ r & 2q & p-r & 2q & r \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & r & 2q & p-r \end{bmatrix}, \quad (3-3)$$

به فرم زیر بدست می‌آیند

$$\lambda_s = p - 4q \cos\left(\frac{s\pi}{N+1}\right) + 2r \cos\left(\frac{2s\pi}{N+1}\right), \quad 1 \leq s \leq N. \quad (3-4)$$

قضیه ۳-۱-۳. فرض کنید ماتریس‌های B و $B+E$ ماتریس‌های متقارن $N \times N$ باشند، آنگاه

$$\lambda_k(B) + \lambda_N(E) \leq \lambda_k(B+E) \leq \lambda_k(B) + \lambda_1(E), \quad k = 1, \dots, N \quad (3-5)$$

که در آن $\lambda_k(A)$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند که

$$\lambda_N(A) \leq \dots \leq \lambda_1(A). \quad (3-6)$$

لم ۳-۱-۴. (لم ایتو) تابع $V: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را که $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ در نظر بگیرید بطوریکه $S(t)$ در فرآیند ایتوی زیر صادق باشد

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW, \quad (3-7)$$

که در آن $W(t)$ یک فرآیند وینر است. آنگاه

$$dV = (aV_S + \frac{1}{2}b^2V_{SS} + V_t)dt + bV_SdW. \quad (3-8)$$

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy order	مرتبه دقت
Analytical solution	جواب تحلیلی
Approximate solution	جواب تقریبی
Backward difference	تفاضل پسرو
Bifurcated nature	ماهیت انشعابی
Boundary coditions	شرایط مرزی
Boundary point	نقطه مرزی
Coefficient matrix	ماتریس ضرایب
Column vector	بردار ستونی
Compact finite difference method (CFDM)	روش تفاضلات متناهی فشرده
Computational	محاسباتی
Consistency	سازگاری
Convergence	همگرایی
Critical value	مقدار بحرانی
Denominator	مخرج
Derivative	مشتق
Diameter	قطر

Dimension	بعد
Discretized	گسسته سازی
Divergence	واگرایی
Domain	دامنه
Elapsed time	زمان سپری شده
Euler method	روش اویلر
Exact solution	جواب دقیق
Exists	موجود
Explicit method	روش صریح

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

probability	احتمال
posterior probability	احتمال پسینی
prior probability	احتمال پیشینی
occurrence probability	احتمال رخداد
propositional probability	احتمال گزاره‌ای
observation probability	احتمال
axiom	اصل موضوع
reduction axioms	اصول موضوعه‌ی
public announcement	اعلان عمومی
probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
static	ایستا
belief	باور
update	به‌روزرسانی
probability	احتمال
posterior probability	احتمال پسینی
prior probability	احتمال پیشینی

occurrence probability	احتمال رخداد
propositional probability	احتمال گزاره‌ای
observation probability	احتمال
axiom	اصل موضوع
reduction axioms	اصول موضوعه‌ی
public announcement	اعلان عمومی
probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی
inner probability measure	اندازه‌ی احتمالاتی درونی
static	ایستا

- [1] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 4238-4249. [15](#)
- [2] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. Academic Press, (1986) [3](#)
- [3] Y. Aksoy, M. Pakdemirli, New perturbation-iteration solutions for Bratu-type equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 2802–2808. [9](#)
- [4] W.F. Ames, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, (1977)
- [5] Y.A.S. Aregbesola, Numerical solution of Bratu problem using the method of weighted residual, *Electron. J. South Afr. Math. Sci.* 3 (1) (2003) 1–7.
- [6] B. Batiha, Numerical Solution of Bratu-type equations by the Variational Iteration Method, *Hacettepe J. Math. Stat.* 39 (1) (2010) 23–29.
- [7] J. P. Boyd, Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, *Appl. Math. Comput.* 143 (2003) 189–200. [9](#), [10](#)
- [8] J.P. Boyd, An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation. *J. Sci. Comput.* 1 (1986) 183–206. [9](#), [10](#)
- [9] G. Bratu, Sur les équations intégrales non linéaires. *Bull. Math. Soc. France* 42 (1914) 113–142. [7](#)
- [10] R. Buckmire, Applications of Mickens finite differences to several related boundary value problems. *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, (2005) [7](#), [9](#), [10](#), [15](#)

- [11] H. Caglar, N. Caglar, M. Ozer, Antonios Valaristos, Antonios N. Anagnostopoulos, B-spline method for solving Bratu's problem, *Int. J. Comput. Math.* 87 (8) (2010) 1885–1891. [9](#), [15](#)
- [12] H. Caglar, N. Caglar, M. Ozer, A. Valaristos, A. N. Miliou, A. N. Anagnostopoulos, Dynamics of the solution of Bratu's equation, *Nonlinear Anal.* 71 (2009) 672–678.
- [13] T. Chan , H.B. Keller, Arc-length continuation and multi-grid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 3 (1984) 173–194. [10](#)
- [14] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover, New York, (1967). [8](#)
- [15] M. Ciment, S. H. Leventhal, Higher Order Compact Implicit Schemes for the Wave Equation, *Mathematics of Computation*. Vol. 29, No. 132, Oct., 1975 [3](#)
- [16] M. Ciment , S. H. Leventhal, B. C. Weinberg, The Operator Compact Implicit Method for Parabolic Equations, *J. Compact. Phys.* 28 (1978),135-166. [3](#)
- [17] L. Collatz, *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin, (1960). [2](#)
- [18] M. J. P. Cullen, A Finite Element Method for a Non-linear Initial Value Problem *IMA Journal of Applied Mathematics*, Volume 13, Issue 2, April (1974), Pages 233–247, [2](#)
- [19] N. Das , R. Singh , A. Wazwaz , J. Kumar, An algorithm based on the variational iteration technique for the Bratu-type and the Lane-Emden problems. *J. Math. Chem.* 54 (2016) 527–551. [15](#)
- [20] E. Deeba, S.A. Khuri, S. Xie, An algorithm for solving boundary value problems, *J. Comput. Phys.* 159 (2000) 125–138. [9](#), [15](#)
- [21] E. Doha , A. Bhrawy , D. Baleanu , R. Hafez ; Efficient Jacobi-Gauss collocation method for solving initial value problems of Bratu type. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53(9)(2013) 1292–1302.

- [22] J. Douglas , H.H. Rachford, On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. Transactions of the American Mathematical Society, 82 (1956) 421–439. [2](#)
- [23] A.S. Fokas and Q.M. Liu, Generalised conditional symmetries and exact solutions of nonintegrable equations, Theor. Math. Phys. 99 (1994) 263–277.
- [24] Gaitonde, Datta V., and Visbal, R. Miguel , High-order schemes for navier-stokes equations: Algorithm and implementation into fdl3di, Tech. report, Air Vehicles , DIRECTORATE., Air Force Research Laboratory, Aughust (1998).
- [25] W. Hackbusch , Comparison of different multi-grid variants for nonlinear equations. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 72 (1992) 148–151. [10](#)
- [26] M. Hajipour, A. Jajarmi, D. Baleanu, On the accurate discretization of a highly nonlinear boundary value problem, Numer. Algor. 79 (2018) 679–695. [4](#)
- [27] I.H.A.H. Hassan, V.S. Erturk, Applying differential transformation method to the one-dimensional planar Bratu problem, Int. J. Contemp. Math. Sci. 2 (2007) 1493–1504.
- [28] R.S. Hirsh, High Order Accurate Difference Solutions of Fluid Mechanics Problems by a Compact Differencing Technique. Journal of Computational Physics, 19 (1975) 90–109. [3](#)
- [29] J. Jacobsen, K. Schmitt, The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators. J. Differential Equations 184, (2002) 283–298. [4](#), [7](#)
- [30] R. Jalilian, Non-polynomial spline method for solving Bratu’s problem, Comput. Phys. Commun. 181 (2010) 1868–1872. [9](#), [15](#)
- [31] H. Jarausch, W. Mackens, Computing solution branches by use of a condensed Newton-supported Picard iteration scheme. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 64 (1981) 282–284.
- [32] J. Karkowski, Numerical experiments with the Bratu equation in one, two and three dimensions. Comp. Appl. Math. 32 (2013) 231–244.

-
- [33] S.A. Khuri, A new approach to Bratu's problem, Appl. Math. Comput. 147 (2004) 131–136. [9](#), [15](#)
 - [34] M. Kumar, N. Yadav, Numerical solution of Bratu's problem using multilayer perceptron Neural Network method. Natl. Acad. Sci. Lett. 38(5) (2015) 425–428. [9](#), [15](#)
 - [35] S.K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, J. Comput. Phys. 103 (1992) 16–42. [3](#), [10](#)
 - [36] S. Li, S.J. Liao, An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem, Appl. Math. Comput. 169 (2005) 854–865. [9](#), [10](#), [19](#)
 - [37] X. Liu, Y. Zhou, X. Wang, J. Wang, A wavelet method for solving a class of nonlinear boundary value problems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 18 (2013) 1939–1948. [9](#), [15](#)
 - [38] R. E. Mickens, Nonstandard finite difference models of differential equations. World Scientific, Singapore (1994) [3](#)
 - [39] R. E. Mickens, Applications of nonstandard finite-difference schemes . World Scientific, River Edge, NJ, (2000) [4](#)
 - [40] A. Mohsen, On the integral solution of the one-dimensional Bratu problem. J. Comput. Appl. Math. 251 (2013) 61–66. [9](#)
 - [41] A. Mohsen, L.F. Sedeek, S.A. Mohamed, New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem. Appl. Math. Comput. 204 (2008) 325–339.
 - [42] A. Mohsen, A simple solution of the Bratu problem. Comp. Math. App. 67, 26–33 (2014) [9](#), [10](#), [15](#)
 - [43] G. Moore, A. Spence, The calculation of turning points of nonlinear equations. SIAM J. Numer. Anal. 17 (4) (1980) 567–576.

- [44] S. S. Motsa, P. Sibanda, Some modifications of the quasilinearization method with higher-order convergence for solving nonlinear BVPs. *Numer. Algor.* 63 (3)(2013) 399–417. [9](#)
- [45] S. Odejide, Y. Aregbesola, A note on two-dimensional Bratu problem. *Kragujevac J. Math.* 29 (2006) 49–56. [10](#)
- [46] J. Rashidinia, K. Maleknejad, N.Taheri, Sinc-Galerkin method for numerical solution of the Bratu's problems. *Numer. Algor.* 62 (2013) 1–11. [9](#), [15](#)
- [47] U. Saeed, M. Rehman, Wavelet-galerkin quasilinearization method for nonlinear boundary value problems. *Abstract and Applied Analysis* (2014), Article ID 868934 (2014). doi:10.1155/2014/868934. [9](#)
- [48] L.F. Shampine, M.W. Reichelt, J. Kierzenka, Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html> [19](#)
- [49] R. Simpson, A method for the numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 12 (1975) 439–451.
- [50] G.D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Oxford university press, (1985).
- [51] J. Stoer, R.Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York, (1993)
- [52] M.I. Syam, A. Hamdan, An efficient method for solving Bratu equations, *Appl. Math. Comput.* 176 (2006) 704–713. [9](#)
- [53] M. I. Syam, , B. Attili, Weighted residual method for obtaining positive solutions of two-point nonlinear boundary value problems. *Appl. Math. Comput.* 176 (2006) 775–784. [9](#)
- [54] H. Temimi, M. Ben-Romdhane, An iterative finite difference method for solving Bratu's problem. *J. Comput. Appl. Math.* 292 (2016) 76–82. [9](#), [15](#)

-
- [55] Tyler G. Jonathan , Analysis and Implementation of High-Order Compact Finite Difference Schemes. All Theses and Dissertations, (2007).
- [56] M.Z. Ullah, S. Serra-Capizzano, F. Ahmad, An efficient multi-step iterative method for computing the numerical solution of systems of nonlinear equations associated with odes. Appl. Math. Comput. 250 (2015) 249–259. [9](#)
- [57] A. M. Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, Appl. Math. Comput. 166 (2005) 652–663.
- [58] S. Xie, G. Li, S. Heo, S. Yi, A compact finite difference method for solving Burgers' equation, J. Number.Meth. Fluids. (2009) 641–773. [3](#)
- [59] S.Xie, G. Li, S. Yi, Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation, J. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009) 1052–1060. [3](#)
- [60] Y. Xu, X. Li, L. Zhang, The particle swarm shooting method for solving the Bratu's problem. Journal of Algorithms & Computational Technology 9 (3)(2014) 291–302. [9](#), [19](#)
- [61] Z. Yang, L. Shijun, A HAM-based wavelet approach for nonlinear partial differential equations: two dimensional Bratu problem as an application. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 53 (2017) 249–262. [9](#)
- [62] M. Zarebnia, Z. Sarvari, Parametric spline method for solving Bratu's problem. Int. J. Nonlin. Sci. 14 (2012) 3–10. [9](#), [15](#)

Abstract

The Bratu's problem is a highly nonlinear boundary value problem and extensively applied as a benchmark problem to test the accuracy of many analytical and numerical techniques. The aim of this thesis is to design an accurate discretization method to solve the one- and two-dimensional Bratu-type problems. By discretization of the second-order derivative via a fourth-order nonstandard compact finite difference formula, the considered problem is first reduced to the solution of a highly nonlinear algebraic system. Then to solve the derived nonlinear system, a modified nonlinear Newton's solver is used. The new scheme is fast and straightforward, it has fourth-order of accuracy to find the lower and upper branches of the Bratu's problem. Numerical simulations and comparative results for the one- and two-dimensional cases verify that the new technique is more accurate than the other existing methods in the literature.

Keywords: Nonstandard compact finite difference scheme, High accuracy order, nonlinear Bratu's problem.



Sahand University of Technology
Department of Mathematics

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Master Degree of Science in
Applied Mathematics (Numerical Analysis)

A sample of Msc (PhD) thesis in Xepersian style

Supervisor

Dr Mojtaba Hajipour

Advisor

Dr Advisor Name

by

Name Family

December 2020